Exercice 1. (a) La multiplicité géométrique demandée est

$$\delta_\lambda(2) = \dim \operatorname{Ker}\left((B - \lambda \cdot I_7)^2\right) = 2.$$

Explication : La matrice $B = J_7(\lambda)$ représente un endomorphisme cyclique d'ordre 7 et de valeur propre λ, et on a vu au cours que les multiplicités géométriques valent $\delta_{B,\lambda}(k) = \min\{k, 7\}$ (voir Lemme 9.9.4).

Voici une autre explication, plus directe : la matrice $N := B - \lambda I$ est un bloc de Jordan nilpotent $N = J_7(0)$ d'ordre 7. Si on note $\{e_1, \ldots, e_7\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^7$, alors on $Ne_1 = 0$ et $Ne_i = e_{i-1}$ pour $i \geq 2$. Puis $N^2 e_i = e_{i-2}$ pour $i \geq 3$ et $N^2 e_1 = N^2 e_2 = 0$. On a donc

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 5 et donc $\dim \operatorname{Ker}(N^2) = 7 - 5 = 2$.

Plus généralement, pour tout bloc de Jordan nilpotent $J_m(0)$ d'ordre m on a $\operatorname{rang}(J_m^k(0)) = m - k$ pour tout $k \leq m$ ce qui donne une autre explication de la formule $\delta_{J_m(\lambda),\lambda}(k) = \min\{k, m\}$.

(b) Le polynôme minimal de J est $\mu = (X - \lambda)^m$, il a donc une racine multiple sauf si $m = 1$ et donc J est diagonalisable si et seulement si $m = 1$.

Autre raisonnement : la seule valeur propre de J est λ. Sa multiplicité géométrique est 1 et sa multiplicité algébrique est m, donc J est diagonalisable si et seulement si $m = 1$.

Exercice 2. La preuve que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$ est une compétence standard du premier semestre.

Pour trouver la base duale, on écrit la matrice de transition P de la base canonique vers la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ et on calcule la matrice contragrédiente :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (P^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\varphi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\varphi_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ et $\varphi_3 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3$; ce qui signifie que

$$\varphi_1(x,y,z) = x - y + z, \quad \varphi_2(x,y,z) = y - z, \quad \varphi_3(x,y,z) = -x + 2y - z.$$

On vérifie alors que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Cette méthode n'ayant pas été vue en cours, on peut soit la retrouver, soit procéder directement (ce qui nous montrera en passant que cette approche fonctionne en toute dimension et justifiera l'étape précédente). Soit $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) tels que $\{(x,y,z) \mapsto \varphi_i(x,y,z) = a_i\, x + b_i\, y + c_i\, z\}_{1\leq i\leq 3}$ soit la base duale de $\{v_1, v_2, v_3\}$. Comme $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, on obtient les systèmes linéaires successifs :

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 1 \\ a_1 \quad - \quad c_1 = 0 \\ \qquad b_1 + c_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ a_2 \quad - \quad c_2 = 1 \\ \qquad b_2 + c_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 = 0 \\ a_3 \quad - \quad c_3 = 0 \\ \qquad b_3 + c_3 = 1 \end{cases}$$

Les deux dernières équation du premier système montre que $a_1 = c_1$ et $b_1 = -c_1$, ce qui donne $c_1 = 1$ et $\varphi_1(x,y,z) = x - y + z$. De même, on obtient $a_2 = c_2 + 1$ et $b_2 = c_2$, ce qui donne $c_2 = -1$ et $\varphi_2(x,y,z) = y - z$. Enfin, on obtient successivement $a_3 = c_3$ et $b_3 = 1 - c_3$, ce qui donne $c_3 = -1$ et $\varphi_3(x,y,z) = -x + 2\,y - z$.

Exercice 3. Rappelons que $E \subset V$ est une famille libre si pour toute combinaison linéaire nulle est triviale. Il s'agit donc de l'implication logique suivante :

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0,\ \text{(avec } \{x_1, \cdots, x_n\} \subset E \text{ deux à deux distincts)}\right] \Rightarrow \big[\lambda_i = 0 \ \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\big].$$

L'hypothèse de l'exercice implique qu'il existe $\varphi_i = \varphi_{x_i} \in V'$ tel que $\varphi_i(x_j) = 0$ si et seulement si $i \neq j$. Par conséquent, en multipliant par $\varphi_i(x_i)^{-1}$, on obtient (sans changer la notation) $\varphi_i \in V'$ tel que $\varphi_i = \delta_{x_i}$. On a alors par linéarité

$$0 = \varphi_j\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j.$$

Par conséquent, on obtient $\lambda_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

L'énoncé réciproque est également vrai. En effet, si $E \subset V$ est une famille libre, alors il existe[1] une base B de V qui contient E. Pour chaque élément $x \in E$ on définit alors une application $\varphi_x : B \to K$ par la condition que $\varphi_x(y) = 0$ si $y \neq x$ et $\varphi_x(y) = 1$ si $y = x$. On peut alors étendre φ_x en une application linéaire $\varphi_x : V \to K$ avec la même propriété (car B est une base de V).

---

1. Cette affirmation est un théorème du premier semestre si $\dim(V) < \infty$ et si $\dim(V) = \infty$, c'est un résultat qu'on prouve en utilisant l'axiome du choix (ou plus précisément, le lemme de Zorn ; voir plus bas).

Exercice 4. Nous donnons trois solutions à cet exercice :

Première solution : On remarque tout d'abord que $\mathrm{Ker}(\alpha)$ et $\mathrm{Ker}(\beta)$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$ de W (par le théorème du rang). On suppose aussi que $\mathrm{Ker}(\alpha) \neq \mathrm{Ker}(\beta)$, cela implique que $\mathrm{Ker}(\alpha) \not\subset \mathrm{Ker}(\beta)$. On a donc

$$n-1 = \dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) < \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)) \leq \dim(V) = n.$$

Par conséquent on doit avoir $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)) = n$ et par la formule sur la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels on a

$$\begin{aligned}
2(n-1) &= \dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) + \dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) \\
&= \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)) + \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)) \\
&= n + \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta))
\end{aligned}$$

De cette équation on conclut facilement que $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)) = n-2$.

*Deuxième solutio*n : Comme dans la première solution, on constate d'abord que $\mathrm{Ker}(\alpha) \not\subset \mathrm{Ker}(\beta)$ et $\mathrm{Ker}(\beta) \not\subset \mathrm{Ker}(\alpha)$. On peut donc trouver deux vecteurs $v, w \in W$ tels que $\alpha(v) = \xi \neq 0$ et $\beta(v) = 0$ et $\alpha(w) = 0$ et $\beta(w) = \eta \neq 0$.

On considère maintenant l'application $f : V \to \mathbb{K}^2$ définie par $f(x) = (\alpha(x), \beta(x))$. Alors $f(v) = (\xi, 0)$ et $f(w) = (0, \eta)$ sont des vecteurs linéairement indépendants. Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}^2$ est de dimension (au moins 2) et on conclut que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ (en particulier f est surjective). Par le théorème du rang on a donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \dim(\mathrm{Im}(f)) = n-2.$$

Troisième solution : Posons $W = \mathrm{Ker}(\alpha)$. Alors W est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ (par le théorème du rang). On considère l'application $\beta|_W : W \to K$, une forme linéaire sur W. D'abord on remarque que $\beta|_W$ n'est pas l'application nulle, car si on avait $\beta|_W = 0$, alors $\beta(w) = 0$ pour tout $w \in W = \mathrm{Ker}(\alpha)$ et donc $\mathrm{Ker}(\alpha) \subset \mathrm{Ker}(\beta)$. Mais ces deux sous-espaces sont de dimension $n-1$ et non égaux par hypothèse.

Comme $\beta|_W \neq 0$ on a que $\beta|_W$ est surjective. (Le seul sous-espace non nul de K est K lui-même).

Par le théorème du rang on a

$$n-1 = \dim W = \dim(\mathrm{Ker}(\beta|_W)) + \dim(\mathrm{Im}(\beta|_W)) = \dim(\mathrm{Ker}(\beta) \cap \mathrm{Ker}(\alpha)) + 1.$$

On conclut que $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)) = n-2$.

Exercice 5. On considère une base quelconque $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V et on note $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset V'$ la base duale. On peut écrire $x = \sum_{i=1}^n x_n v_n$ avec $x_i \in \mathbb{K}$, et comme $x \neq 0$ il existe j tel que $x_j \neq 0$. On a donc

$$\varphi_j(x) = \varphi_j\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = x_j \neq 0,$$

et on peut donc prendre $\theta = \varphi_j$.

Ce résultat est encore valable en dimension infinie, car on définit φ_i sur Vect $\{v_1, \cdots, v_n\}$ par $\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j}$ puis on étend cette application linéaire à tout l'espace en utilisant le théorème de Hahn-Banach (se référer à mon cours sur les distributions pour une preuve, ou consulter l'ouvrage de Haïm Brezis mentionné dans la bibliographie).

Exercice 6.

a) Faux en général mais vrai si on suppose $\varphi \neq 0$ (appliquer la formule du rang pour le voir)).

b) La réponse est oui. On peut ou bien le prouver à partir de l'exercice précédent ou bien raisonner comme suit : Puisque v est non nul, on peut l'étendre en une base $\mathscr{B} = \{v_1 = v, v_2, \cdots, v_n\}$ de V. Alors la première forme linéaire $\psi := \varphi_1$ dans la base duale $\mathscr{B}' = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ satisfait la condition.

c) La réponse est négative si $\dim(V) = 1$ et positive si $\dim(V) \geq 2$. En effet, si $\dim(V) = 1$ et $v \neq 0$, alors toute forme linéaire non nulle $\psi \in V'$ satisfait $\psi(v) \neq 0$.

   En revanche, si $\dim(V) \geq 2$, l'affirmation est vraie. En effet, si $v \neq 0$ on peut trouver une base $\mathscr{B} = \{v_1 = v, v_2, \cdots, v_n\}$ de V, avec $n \geq 2$. Alors la deuxième forme linéaire $\psi := \varphi_2$ dans la base duale $\mathscr{B}' = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ satisfait la condition.

d) Oui. En effet, soit $\mathscr{B}' = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ la base de V' duale de $\mathscr{B}$. On sait que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\psi_i = \sum_{j=1}^n \psi_i(v_j)\varphi_j$$

   (voir la Proposition 10.1.3). Donc $\psi_1, \cdots, \psi_n$ forment une base de V' si et seulement la matrice $(a_{ij}) = (\psi_i(v_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible. De plus cette matrice est la matrice de transition entre la base $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ et la base $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$.

e) Oui. On peut appliquer le critère de l'exercice (d) et vérifier que la $3 \times 3-$matrice $(\varphi_i(e_j))$ est inversible. On peut aussi raisonner directement : supposons que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0$, avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. En évaluant en un vecteur (x, y, z) arbitraire, on trouve $\lambda_1(3x-y+z)+\lambda_2(3x+y+z)+\lambda_3(3x-3y+2z) = 0$. Comme (x, y, z) est arbitraire, on peut prendre $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, et $(0, 0, 1)$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

dont les seules solutions sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (vérification aisée). Cela montre l'indépendance linéaire des 3 formes linéaires.

f) Oui. On choisit une base $(u_1, \dots u_{n-1})$ de U et on la complète en une base $(u_1, \dots u_{n-1}, u_n)$ de V. On prend pour φ la n-ème fonction coordonnée correspondante, définie par

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = a_n \qquad \forall\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\,.$$

C'est une forme linéaire sur V, donc $\varphi \in V'$, et il est clair que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1}) = U$.

Exercice 7. L'énoncé est faux. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables (car B est diagonalisable) mais non congruentes (car A est symétrique mais B est non symétrique, or il est facile de vérifier que toute matrice congruente à une matrice symétrique est elle-même symétrique).

Remarque : Le problème général de décider si deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ sont congruentes est un problème difficile qui n'a pas de réponse générale simple. Nous étudierons plus tard le cas très particulier (mais important) des matrices réelles qui sont symétriques.

Exercice 8. (a) Dire qu'une partie S d'un espace vectoriel V est libre signifie que toute sous-famille *finie* de vecteurs de S est libre. C'est-à-dire que si $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S$ (et les x_i sont deux-à-deux distincts), et si $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j = 0$, alors $\lambda_j = 0$ pour tout j.

Pour prouver que $\{\delta_a : a \in \mathbb{R}\} \subset C^0(\mathbb{R})'$ est une famille libre, on doit donc considérer une combinaison linéaire finie de covecteurs d'évaluations qui donne le covecteur nul. C'est-à-dire $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \delta_{a_j} = 0 \in C^0(\mathbb{R})'$ où $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}$ sont deux-à-deux distincts, et montrer que $\lambda_j = 0$ pour tout j.

Or en effet, si $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \delta_{a_j} = 0$, alors pour toute fonction continue $f \in C^0(\mathbb{R})$ on a

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \delta_{a_j}(f) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j).$$

Choisissons une fonction $h_i \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $h_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$ et $h_i(a_i) \neq 0$ (par exemple $h_i(x) = \prod_{j \neq i}(x_j - a_j))$, alors

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_i(a_j) = \lambda_i h_i(a_i).$$

Donc $\lambda_i = 0$ puisque $h_i(a_i) \neq 0$. On peut faire cela pour chaque i, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i ce qui démontre que les covecteurs $\delta_{a_1}, \ldots, \delta_{a_m}$ sont linéairement indépendants dans l'espace $C^0(\mathbb{R})'$.

(b) L'intégration sur l'intervalle $[a, b]$ définit une opération linéaire $I_[a, b] : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, c'est donc une forme linéaire sur l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R})$.

(c) Les formes linéaires $I_{[a,b]}, I_{[b,c]}, I_{[a,c]} \in C^0(\mathbb{R})'$ ne sont pas linéairement indépendantes car on a $I_{[a,c]} = I_{[a,b]} + I_{[b,c]}$. En effet cette égalité est équivalente à la règle

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

(d) Non on ne peut pas exprimer le covecteur $I_{[a,b]}$ comme combinaison linéaire des covecteurs $\{\delta_a : a \in \mathbb{R}\}$. Une explication rapide est qu'une combinaison linéaire de covecteurs d'évaluations δ_{a_i} nous donne une information *finie* sur une fonction (i.e. on l'évalue en un nombre fini de points) mais l'intégration sur un intervalle dépend de la valeur de f en « presque tous les points » de cet intervalle (il y a un sens précis à l'expression « presque tous les points » mais ne nous inquiétons pas de cela.)

Voici un argument plus rigoureux : Si un ensemble fini $\{a_1, \ldots a_n\} \subset \mathbb{R}$ est donné, on peut considérer la fonction continue

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2.$$

Cette fonction s'annule exactement sur les points $\{a_1, \ldots a_m\}$ et elle est strictement positive sur le complémentaire de cet ensemble fini. Par conséquent $I_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(x)dx > 0$, mais pour toute combinaison linéaire des δ_{a_i} on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) = 0.$$

Il n'est donc pas possible que $I_{[a,b]} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}$ dans l'espace dual $C^0(\mathbb{R})'$.

Remarque. Le covecteur d'intégration $I_{[a,b]}$ ne peut pas s'écrire comme une comme combinaison linéaire de covecteurs d'évaluations, mais par contre *c'est une limite de telles combinaisons linéaires.* En effet, si pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$ et chaque $f \in C^0([a,b])$ on note

$$S_k(f) = \frac{b-a}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f(a + \tfrac{j}{k}(b-a)).$$

Alors, par définition de l'intégrale de Riemann, on a $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(f) = I_{a,b}(f)$. Cela signifie qu'on peut écrire

$$I_{[a,b]} = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{a+\frac{j}{k}(b-a)} \in (C^0([a,b]))'.$$

Exercice 9. Ces deux formes bilinéaires sont identiques. Cela se voit en calculant que

$$\mathrm{Tr}(A^t \cdot B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ji}b_{ji} = \mathrm{Tr}(A \cdot B^t)$$

Exercice 10. 1.

— $m = 2$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\exp(J_2)= \mathrm{I}_2 + J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— $m = 3$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\exp(J_3)= \mathrm{I}_3 + J_3 + \frac{1}{2}(J_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

— $m = 4$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\exp(J_4)= \mathrm{I}_4 + J_4 + \frac{1}{2}(J_4)^2 + \frac{1}{6}(J_4)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En général, pour tout $k \geq 1$ on a la formule immédiate en blocs

$$J_m(0)^k = \begin{pmatrix} 0_{k-1} & J_{m-k+1}(0) \\ 0_{m-k+1} & 0_{k-1} \end{pmatrix},$$

où l'on entend que $J_m(0)^k = 0$ pour $k \geq m$. La série exponentielle devient donc

$$\exp(J_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(J_m)^k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(J_m)^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{2!} & \cdots & \dfrac{1}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \dfrac{1}{2!} \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base canonique $\{E_{ij}\}$ de l'espace $\mathrm{M}_n(K)$ des matrice carrées on peut écrire

$$\exp(J_m) = \sum_{i\leq j} \frac{1}{(j-i)!} E_{ij}.$$

2. Si A et B commutent on peut écrire

$$\frac{1}{n!}(A+B)^n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} A^k B^{n-k}.$$

De plus, par la convergence absolue des séries pour A et B,

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(B) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}B^j = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{j!}A^k B^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\frac{1}{(k-m)!}A^m B^{k-m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A+B)^k}{k!} = \exp(A+B)\end{aligned}$$

3. Rappelons que $J_m(\lambda) = \lambda\,\mathrm{I}_m + J_m$. Il est clair que les matrices $\lambda\,\mathrm{I}_m$ et J_m commutent, donc par le point (b) on a $\exp(J_m(\lambda)) = \exp(\lambda I + J_m) = \exp(\lambda I)\exp(J_m)$, or $\exp(\lambda\,\mathrm{I}_m) = e^{\lambda}\mathrm{I}_m$, donc

$$\exp(J_m(\lambda)) = e^{\lambda}\cdot\exp(J_m) = \sum_{i\leq j}\frac{e^{\lambda}}{(j-i)!}E_{ij} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & e^{\lambda} & \dfrac{e^{\lambda}}{2!} & \cdots & \dfrac{e^{\lambda}}{(m-1)!} \\ 0 & e^{\lambda} & e^{\lambda} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \dfrac{e^{\lambda}}{2!} \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & e^{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

4. (i) On a

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|^2}.$$

On voit donc que c'est la norme associée au produit scalaire standard sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et la vérification a donc déjà été faite en cours.

(ii) Ici, on aurait envie d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais ce n'est pas si évident car l'inégalité souhaitée est équivalente à

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|^2}\sqrt{\sum_{k,l=1}^{n}|b_{k,l}|^2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre seulement que

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}||b_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2}\sqrt{\sum_{k,l=1}^n |b_{k,l}|^2}.$$

Cependant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de prouver le résultat attendu. Pour tout $1 \leq i,j \leq n$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^n |b_{l,j}|^2\right),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{i,j=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|^2} &\leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^n |b_{l,j}|^2\right)}\\ &= \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}|^2}\sqrt{\sum_{j,l=1}^n |b_{l,j}|^2}\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini (et cela démontre l'inégalité, l'ordre des indice étant indifférent).

Autrement, les racines carrées n'aidant pas, on va considérer comme dans la preuve alternative de l'inégalité de Cauchy-Schwarz la quantité suivante

$$\begin{aligned}\|A\|^2\|B\|^2 - \|AB\|^2 &= \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2\right)\left(\sum_{k,l=1}^n b_{k,l}^2\right) - \sum_{i,j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,l}\right)^2\\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{i,j}^2b_{k,l}^2 - \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{i,k}b_{k,j}a_{i,l}b_{l,j}, \qquad (1)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini (trivial pour les sommes finies). Les indices i,j,k,l étant muets, on a également

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{i,j}^2b_{k,l}^2 = \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{i,k}^2b_{l,j}^2 = \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{i,l}^2b_{k,j}^2. \qquad (2)$$

Attention, il faut que tous les indices soient distincts (autrement, le théorème de Fubini ne serait pas applicable). Par conséquent, on obtient par (1) et (2)

$$\begin{aligned}\|A\|^2\|B\|^2 - \|AB\|^2 &= \sum_{i,j,k,l}^n\left(\frac{1}{2}a_{i,k}^2b_{l,j}^2 + \frac{1}{2}a_{i,l}^2b_{k,j}^2\right) - \sum_{i,j,k,l}^n a_{i,k}b_{k,j}a_{i,l}b_{l,j}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^n\left(a_{i,k}b_{l,j} - a_{i,l}b_{k,j}\right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

et l'inégalité est démontrée.

(iii) On obtient donc par récurrence immédiate

$$\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a (en utilisant les propriétés de la norme)

$$\left\|\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \|A\|^k \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|} < \infty.$$

Par conséquent, la série (qu'on voit comme une série vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^{n^2}$) est absolument convergente, ce qui implique qu'elle est convergente (résultat d'analyse, qui découle simplement de la complétude de $\mathbb{R}^{n^2}$ muni de sa distance canonique issue de la norme euclidienne) et le résultat est démontré.